Pour fabriquer une mesure de performance, on peut d'abord se poser cette question :
Doit-on traiter globalement toute l'information donnée, ou bien séparer en deux les moments , avec une attitude asymétrique dépendant des préférences de l'investisseur ?

Si on cherche à mesurer le risque d'un portefeuille par rapport à une référence, il vaut mieux diviser l'information en deux. De même, si on veut évaluer les garanties et la solvabilité des gérants de fonds de pensions sur un horizon de temps, l'attention doit être portée sur les décalages négatifs des rendements.
L'attitude naturelle consiste donc à privilégier une asymétrie des préférences .

Section I : approche asymétrique :

I La mesure Omega

La mesure Oméga, présentée par Con Keating & William Shadwick [1] , est une nouvelle approche de l'analyse des distributions de rendements qualifiée de "naturelle" , car elle incorpore tous les moments par une transformation directe.
C'est justement ce qui est interressant pour les mesures de performances des actifs aux rendements non-normalement distribués comme en gestion alternative.
Les moments sont séparés en deux parties, en fonction d'un seuil variable reflètant les préférences du décideur.
Les fonctions Ω déterminent une classe de fonctions décroissantes bijective avec celle des fonctions de répartition des rendements.
En particulier, la fonction Ω vaut 1 seulement pour la valeur moyenne de la fonction de répartition.

A Présentation

En finance la fonction Ω représente la qualité du pari que fait l'investisseur en choisissant le seuil de pertes L :

$$\Omega = \frac{\text{Espérance de gains si on gagne le pari} \times \text{probabilité de gagner}}{\text{Espérance de pertes si on perd} \times \text{probabilité de perdre}}$$

[1] Keating C. & Shadwick W. The finance development centre , london - Mai 2002
- A universal performance meassure - Journal of performance mesurement, vol 6, n°3 p59-84

$$\Omega = \frac{E(R - L / R>L) . (1-F(L))}{E(L - R/ R<L) . F(L)}$$

Avec F: $[a,b] \mapsto [0,1]$ / $F(r) = P\{R \leq r\} = \int_a^r f(x)\,dx$

R : rendement de l'actif sur une période

r : seuil variable $\in [a,b]$

Cette construction donne par extension, la définition de la fonction Oméga :

$$\Omega(r) = \frac{\int_r^b [1- F(x)]\,dx}{\int_a^r F(x)\,dx}$$

L' existence et la convergence des intégrales étant obtenues dans la pratique,
Ω est alors une fonction continue de $[a,b] \mapsto [0,\infty[$

- Soit $I_1(r) = \int_a^r F(x)\,dx$, on peut l'expliciter ainsi:

$$\int_a^r d[x F(x)] = r F(r)$$

et aussi:

$$\int_a^r d[x F(x)] = \int_a^r d[x F(x)] = \int_a^r F(x)\,dx + \int_a^r x\,dF(x)$$

$$\Rightarrow \quad I_1(r) = r F(r) - \int_a^r x\,dF(x) = \int_a^r (r-x) f(x)dx = \int_a^b \max(r-x ,0) f(x)\,dx$$

$\Rightarrow$ $I_1(r) = E[\max(r-x ,0)] = P(r)$ expression du prix d'un put en probabilité réelle sur l'actif sous-jacent x.

- Pour $I_2(r) = \int_r^b [1- F(x)]\,dx$ on peut aussi remarquer que :

$E[\phi(r)] = \int_0^b [1-F_\phi(x)]dx - \int_a^0 F_\phi(x)\,dx$ où F_ϕ est la fonction de répartition de ϕ.

Si C(r) est l'expression du prix d'un call en probabilité réelle:

$C(r) = E[\phi(r)] = E[\max(x - r ,0)] = \int_0^b [1-F_\phi(x)]dx = \int_r^b [1-F(y)]dy = I_2(r)$

Donc : $\Omega(r) = \dfrac{I_2(r)}{I_1(r)} = \dfrac{C(r)}{P(r)}$

Remarque :

Les analsytes utilisent déjà depuis des années les prix des options pour réduire les risques et évaluer leurs rendements.

Ω permet néanmoins de comparer les rendements de différents actifs et d'établir un classement prenant en compte les effets de tous moments, dans un intervalle de rendements choisi.

B Propriétés :

a différentiabilité

$$\frac{d\Omega}{d\,r} = \frac{\frac{dI_2}{dr} I_1 - \frac{dI_1}{dr} I_2}{(I_1)^2} = \frac{(F(r) - 1) - F(r)I_2}{(I_1)^2} < 0$$

Ω est monotone décroissante de [a,b] $\mapsto$ [0,∞[

Plus la barre doit être placée haut, moins l'investissement est interressant.

b Si μ est la moyenne de la distribution F_X

Il est évident (par définition), que les cumuls de la distribution avant et après μ sont égaux donc que $\Omega(\mu) = 1$.

La mesure Oméga est invariante par une translation de - μ :

En effet :

$$\Omega_{X+\mu}(r-\mu) = \frac{\int_{r-\mu}^{b-\mu} [1 - F_{X+\mu}(x)]\,dx}{\int_{a-\mu}^{r-\mu} F_{X+\mu}(x)\,dx} = \frac{\int_{r}^{b} [1 - F(x)]\,dx}{\int_{a}^{r} F(x)\,dx} = \Omega_X(r)$$

Si $r = \mu \neq 0$

La mesure $\Omega_{X+\mu}$ (0) de $F_{X+\mu}$ = La mesure Ω_X (μ) de la répartition F_X

Or $F_{X+\mu}(0) = P(X - \mu < 0) = 1 - F_{X+\mu}(0)$

$\Rightarrow \int_0^b [1 - F_{X+\mu}(x)]\,dx = \int_a^0 F_{X+\mu}(x)dx$

donc: $\Omega_{X+\mu}(0) = 1$

$\Rightarrow \Omega_X(\mu) = 1$

L'unique point où la mesure Oméga est 1, est donc la moyenne de la distribution.

Keating & Shadwick étendent l'invariance à tous les difféomorphisme affine ϕ de [a,b] tels que $\frac{d\phi}{dr} > 0$, Il suffit donc de pouvoir faire un changement de variable dans I_1 et I_2.

Formellement : $\forall r \in [a,b]$ $\Omega_{X o \phi^{-1}}(\phi(r)) = \Omega_X(r)$

et si $\frac{d\phi}{dr} < 0$ $\Omega_{X o \phi^{-1}}(\phi(r)) = \frac{1}{\Omega_X(r)}$.

On a aussi: $\Omega_X = \Omega_Y \Leftrightarrow X = Y$

C Applications

- En appliquant la mesure Oméga à une distribution normale, on obtient une pente

  à la moyenne μ : $\frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma}$

- $$\Omega(r) = \frac{C(r)}{P(r)} = \frac{\exp(-t_x)\,E[\max(x - r, 0)]}{\exp(-t_x)\,E[\max(r - x, 0)]}$$ t_x : taux sans risque sur une période

$\Rightarrow$

$$\exp(-t_x)[\Omega(r) - 1] = \frac{E(X) - r}{\exp(-t_x)\, E[\max(r - x, 0)]}$$

E(X): espérance du rendement actualisé sur la période

$$\text{Ratio Sharpe-Oméga}^{1} = \frac{E(X) - r}{P(r)}$$

P(r) est le prix traditionnel du put européen sur l'investissement
Ce ratio donne le même classement des actifs que Oméga, et permet d'utiliser les formules du modèle Black&Scholes pour le calculer. [2]

Si $E(X) < r$ ou $\Omega < 1$, l'indice va favoriser les investissements les plus volatiles, ce qui est compatible avec une recherche d'augmentation des revenus de la part des investisseurs.
Dans le cas $E(X) > r$ ou $\Omega > 1$ la volatilé va augmenter le prix du put faire diminuer l'indice.

• Cela montre aussi que la mesure Oméga est surtout sensible aux variations de la moyenne et de la variance du rendement.
La mesure du risque par l'intermédiaire d'un put européen pourrait être qualifiée d'assez restreinte pour évaluer des investissements en gestion alternative.

Autre formulation :

$$\Omega(r) = \frac{E[(X-r)]^+}{E[(r-X)]^+} = 1 + \frac{E(X) - r}{E[(r-X)]^+} .$$

Donc

$$\Omega(r) - 1 = \frac{\text{rendement en excés}}{\text{mesure de risque}} .$$

---

[1] Kazemi H. , Schneeweis T. , Gupta R.- Juin 03 - "Omega as a performance measure"
University of Massachussets, Amherst - Center for International Securities and derivatives markets -

[2] Jurczenko E., Maillet B., Negrea B. - Revisited multi-moment approximate option pricing models : a general comparison -2002 - Working paper

II Généralisation de la mesure Omega :

La référence est un benchmark b reflètant le contexte économique.

Mesures des risques de pertes:

$\rho_{p-}(X) = E^{1/p}[\{(X-b)^-\}^p]$ est le moment partiel normalisé du côté gauche d'ordre p pour l'excés de rendement X, relativement à b .

Mesures de possibilités de gains:

$\rho_{p+}(X) = E^{1/p}[\{(X-b)^+\}^p]$ est le moment partiel normalisé du côté droit d'ordre p ,

avec $\xi^- = \min\{\xi,0\}$ et $\xi^+ = \max\{0,\xi\}$ opérateurs convexes.

Ces mesures de risques bénéficient donc de la sous-additivité et sont cohérentes.
Elles prennent en compte les effets de réduction des queues de distributions produits par la diversification.

Un autre avantage de ces mesures latérales est de pouvoir relier les risques des actifs composant un portefeuille avec ceux du portefeuille lui-même [2] :

Le portefeuille est $S = \Sigma\, c_i X_i$

avec X_i $i = 1, .., n$ actifs risqués de poids $c_i \in \mathbf{R}$.

$$0 \le \rho_{p-}(S) \le \Sigma\, |c_i|\, \rho_{p-}(X_i)$$

$$0 \le \rho_{p+}(S) \le \Sigma\, |c_i|\, \rho_{p+}(X_i)$$

Le ratio de performance $\Phi_{p,q}(X)$ est :

$$\frac{\rho_{p+}(X)}{\rho_{q-}(X)} = \frac{E^{1/p}[\{(X-b)^+\}^p]}{E^{1/q}[\{(X-b)^+\}^q]}.$$

$$= \frac{\left(\int_b^{\infty} (x-b)^p\, dF(x)\right)^{1/p}}{\left(\int_{-\infty}^{b} (b-x)^q\, dF(x)\right)^{1/q}}.$$

---

[1] Tibiletti L. Farinelli S. - Déc 2002 - Sharpe thinking with asymetrical preferences
- Université de Turin, Dpt de statistiques et mathématiques "Diego de Castro"

[2] Tibiletti L. 29 avr. 2002 - « Higher order moments and beyond »
- Workshop on multi-moment capital asset pricing and related topics
- ESCP, EAP European school of management, Paris

p et q sont les ordres respectivement côté droit et gauche du ratio.

Leur choix dépend des préférences de l'investisseur :

la recherche de forts rendements par $p \gg 1$.

l'aversion aux pertes extrêmes est traduite par $q \gg 1$

Pour mesurer les performances des fonds de pensions, on prendra $\Phi_{1,2}$ avec un benchmark correspondant au rendement minimum acceptable:

$\Phi_{1,2}$ (X) avec RMA = Ratio de Sortino

$$\frac{E[(X - RMA)^{+}]}{\sqrt{E[\{(X - RMA)^{-}\}^{2}]}}$$

$\Phi_{1,1}$ (X) = mesure Ω = indifférence aux extrêmes

$$\frac{E[(X - b)^{+}]}{E[(X - b)^{-}]} = \frac{\int_{b}^{\infty} [1-F(x)]\, dx}{\int_{-\infty}^{b} [F(x)]\, dx}$$

$\Phi_{p,q}$ (X) est décroissante avec b :

$$\frac{1}{\Phi_{p,q}(X)} \times \frac{\delta\, \Phi_{p,q}(X)}{\delta\, b} = -\frac{\int_{b}^{\infty} (x-b)^{p-1}\, dF(x)}{\int_{b}^{\infty} (x-b)^{p}\, dF(x)} - \frac{\int_{-\infty}^{b} (b-x)^{q-1}\, dF(x)}{\int_{-\infty}^{b} (b-x)^{q}\, dF(x)} < 0$$

Ce qui implique une importance du choix du benchmark, dans le classements des actifs pour ces mesures de performance .

Section II : approche globale :

I L'index Stutzer

L'indice proposé par M.Stutzer en 2000 [1] repose moins sur une fonction d'utilité, que sur une tendance forte a priori de comportement :
l'individu veut minimiser la probabilité objective que le taux de croissance de l'investissement ne dépasse pas un taux de croissance "cible" pré-défini .
Il reprend ainsi le principe "safety-first" de Roy (1952) .

Cela signifie qu'il cherche à minimiser la probabilité d'excès de rendement négatif par rapport à ce seuil , à l'horizon de temps.
M.Stutzer observe que le taux de croissance de la richesse investie est une variable aléatoire dépendant des rendements et du temps.
Quand le portefeuille a un excès de rendement espéré positif, il définit la décroissance maximum vers zéro de cette probabilité exponentiellement.

La probabilité de ne pas dépasser la cible devenant asymptotiquement égale à 0 quand $T \to \infty$, elle varie d'un portefeuille à l'autre, permettant de sélectionner celui dont la décroissance est la plus rapide.
Inversement, si T est fixé , on peut définir une stratégie de portefeuille afin d'obtenir le meilleur indice.

En s'efforçant de maximiser la probabilité de dépasser un seuil de rendement minimum, l'indice prend en compte l'aversion au risque, l'investisseur choisissant la cible , il est considéré comme une variante du concept d'aversion aux pertes .

A Définition :
Quand le portefeuille a une espérance d'excés de rendement positive, il exprime le taux de décroissance exponentiel maximum vers zéro de la probabilité de ne pas dépasser la cible.

---

[1] Stutzer M. (University of Colorado) - 2000 - "A portfolio performance index" - Financial analysts journal 56 (3)
- 2003 - "Portfolio Choice with endogenous Utility: a large deviation approach"
- Journal of econometrics

[2] Roy A. 1952 , Safety-first and the holding of assets, Econometrica 20

Pour un portefeuille p dont le processus d'excés de rendement est I I D, et dont l'espérance d'excés de rendement est strictement positive, l'index Stutzer s'exprime par

$$I_p = - \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \ln (P [\bar{R}_{pT} \leq 0]) > 0$$

Avec :

$$R_{pT} = \frac{\sum_{t=1}^{T} R_{pt}}{T}$$ moyenne des excés de rendement sur T périodes

L'index Stutzer est égal à 0, quand l'espérance d'excés de rendement est 0.
De plus , il démontre que :

$$\ln R_{pt} \sim N (E[\ln R_p] , Var [\ln R_p]) \text{ et } IID$$

$$\Rightarrow \quad I_p = ½ (\text{ratio de Sharpe})^2$$

Il donne donc le même classement que le ratio de Sharpe
pour les portefeuilles à distributions normales et le portefeuille optimal sera le même.

B Cas général des distributions de rendements non normales :
Composition du portefeuille optimal :

$$w_m = \arg \max_{W_p} \max_{C_p} E [- \exp (- c_p w_p R)]$$

$$I_m = - \ln E [- \exp (- c_m w_m R)]$$

R est le vecteur aléatoire des excés de rendements
c_m est le coefficient optimal d'aversion au risque

En pratique l'optimisation du portefeuille s'obtient par le changement de variables:
on pose : $\gamma_p = c_p w_p$

et on a : $\gamma_m = \underset{\Gamma_p}{\arg\min}\ E[-\exp(-\gamma_p R)]$

$$w_m = \frac{\gamma_m}{\sum_i \gamma_{im}} \qquad \text{et} \quad c_m = \sum_i \gamma_{im}$$

II L'indice π NB :

Conçu expressément pour répondre aux besoins de la gestion alternative, il est issu des dernières recherches du CERSEM (I.Nagot et A.Bonnet).
Cette mesure de performance est définie comme une fonction de la transformée de Laplace.

A La transformée de Laplace :

Si λ est un paramètre réel ou complexe, et f une fonction réelle de x,
on appelle transformée de Laplace la fonction :

$$\lambda \rightarrow F(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} f(x)\, dx$$

F (λ) existe quand cette intégrale converge.
F est une application linéaire de l'ensemble des fonctions f qui admettent des transformées vers l'ensemble des fonctions d'une variable λ .

B On utilise le log de la transformée de laplace :

$$\lambda \rightarrow H_X(\lambda) = -\ln E(e^{-\lambda X})$$

On définit :

$$\pi(X) = \Pi(H_X)$$

ce qui donne une mesure de risque vérifiant la propriété de sous-additivité.

On obtient ensuite par dérivations:

$$H'_X(\lambda) = [-\ln E(e^{-(\lambda X - E(X))})]' + \lambda [E(X)]'$$

$$H'_X(\lambda) = \frac{E(Xe^{-\lambda X})}{E(e^{-\lambda X})} = E_X^\lambda(X) \quad \text{avec} \quad \frac{dP_X^\lambda}{dP} = \frac{E(e^{-\lambda X})}{E(Xe^{-\lambda X})}$$

et $H''_X(\lambda) = -V_X^\lambda(X)$

Où $E_X^\lambda(X)$ et $V_X^\lambda(X)$ sont l'espérance et la variance de X sous la probabilité P_X^λ .

En particulier, pour $\lambda = 0$:

$$H'_X(0) = E(X)$$
$$H''_X(0) = -V(X)$$

C Liens avec le ratio de Sharpe :

si X est gaussienne et
sous l'hypothèse d'une mesure de performance bornée :

$a \to \pi(\mathcal{N}(a,a))$ bornée sur un intervalle ouvert non vide,

on obtient [1] :

$$\pi(\mathcal{N}(a,a)) = a.\pi(\mathcal{N}(1,1))$$

ainsi que :

$$\pi(\mathcal{N}(m,\sigma^2)) = \pi\,\mathcal{N}(m^2/\sigma^2, m^2/\sigma^2) = (m^2/\sigma^2) \times \pi(\mathcal{N}(1,1))$$

On pose : $\pi(\mathcal{N}(1,1)) = ½$

donc : $\pi(\mathcal{N}(m,\sigma^2)) = ½$ (ratio de Sharpe)^2

et $H_{\mathcal{N}(m,\sigma^2)}(\lambda) = m\lambda - \frac{\sigma^2}{2}\lambda^2$

Le classement donné par π est donc le même que celui du ratio de Sharpe dans le cas de distributions gaussiennes.

[1] Démonstrations I.Nagot , A.Bonnet - Mai 2004 , Methodology of measuring performance,I : axiomatic description and representation theorems .

D Caractérisation de la mesure de performance π :

Si $\Im$ est une fonction linéaire et continue et X variable aléatoire admettant une transformée de Laplace:

$$\boldsymbol{\pi (X) = \sup_{\lambda} \Im (H_{\lambda X})}$$

Par exemple :

si $\Im (H) = H'(0) + \frac{1}{2} H''(0)$

$$\max_{\lambda} \Im (H_{\lambda X}) = \max_{\lambda} [\lambda E(X) - \lambda^2 \frac{V(X)}{2}]$$

et $\pi (X) = \frac{1}{2}$ (ratio de Sharpe)^2

Si $\Im (H) = H(1)$ $\max_{\lambda} \Im (H_{\lambda X}) = \max_{\lambda} (- \ln E (e^{-\lambda X}))$

$\pi (X)$ = mesure de Hodges [1]

E Construction de $\Im$:

$$\Im (H_X) = \lim_{x \to +\infty} [\pi (Z_x + X) - x]$$

avec $Z_x = \mathcal{N}(2x, 2x)$ et $\pi (Z_x) = x$

$x \to \pi (Z_x + X) - x$ étant une fonction décroissante de x sur $\mathbf{R}^+$.

On obtient alors :

$$\pi (X) = \max_{\lambda} \Im (H_{\lambda X}) = \Im (H_{\lambda_x X})$$

La mesure de performance π vérifiant l'axiome :

$$\max_{\alpha,\beta} \pi (\alpha X + \beta Y) = \pi (\lambda_x X + \lambda_y Y) = \pi (X) + \pi (Y)$$

Où λ_x ne dépend que de la distribution de X , maximise la note attribuée à l'investissement par la mesure π.

[1] S. Hodges 1998 - A generalization of the Sharpe ratio and its application to valuation bounds

Si X et Y sont gaussiennes :

$$\max_{\alpha,\beta} \pi(\alpha X + \beta Y) \text{ est obtenu pour } \alpha = \frac{E(X)}{V(X)} \text{ et } \beta = \frac{E(Y)}{V(Y)}$$

On convient que $\lambda_{\mathcal{N}(x,x)} = 1$

donc:

$$\Im(H_{\mathcal{N}(m,\sigma^2)}) = m - \frac{\sigma^2}{2} \quad \text{et} \quad \forall \lambda \in \mathbf{R}, \Im(H_{\lambda \mathcal{N}(m,\sigma^2)}) = H_{\mathcal{N}(m,\sigma^2)}(\lambda)$$

F Expression de $\Im$ en tant que distribution :

Par l'intermédiaire des distributions de Schwartz, on obtient autre formulation :

$$\Im(H_X) = C.E(X) + \frac{1}{2} \langle \Gamma, H_X'' \rangle$$

où $C > 0$, Γ est une mesure non négative sur un support compact,
et $\langle \Gamma, 1 \rangle > 0$

G Exemple :

Si $\Gamma = \delta_0$ Dirac en 0 , on retrouve l'expression du ratio de Sharpe :

$$\Im(H_X) = E(X) - \frac{1}{2} H_X''(0)$$

et

$$\pi(X) = \max_{\lambda} \Im(H_{\lambda X}) = \max_{\lambda} [\lambda E(X) - \lambda^2 \frac{V(X)}{2}]$$

Une mesure de performance satisfaisante est obtenue avec :

$$\Im(H_X) = H_X(1) + a H_X(\alpha)$$

en faisant varier les paramètres a et α , en fonction du portefeuille et des préférences de l'investisseur.

<u>Conclusion :</u>

Ce type de mesures représente donc une avancée importante pour les financiers concernés par la gestion alternative.

Il reste donc à les tester et à les calibrer pour répondre aux besoins spécifiques de chaque gérant de fonds .